IFSIC
INSTITUT DE FORMATION SUPERIEURE EN INFORMATIQUE et COMMUNICATION

Université de Rennes 1

Examen

ANAB

Vendredi 24 janvier 2003

Durée : 3 heures

Document de cours autorisé

DIIC 1ère année

Les exercices sont indépendants.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1: (4 points)

1. Quels sont les nombres complexes z pour lesquels la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n n^2 z^n$ est convergente ?
2. Donner une partie de C sur laquelle il y a convergence uniforme (justifier)
3. Quand elle existe, calculer $S(z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n n^2 z^n$

Exercice 2 : (2 points)

Soit la fonction f définie sur C par $f(z) = \dfrac{z^2 - \bar{z}}{2}$

Sur quelle partie de C la fonction f est-elle continue ? holomorphe ?

Exercice 3: (4 points)

Calculer $\oint_C \dfrac{2+3\sin \pi z}{z(z-1)^2}dz$ dans les trois cas suivants :

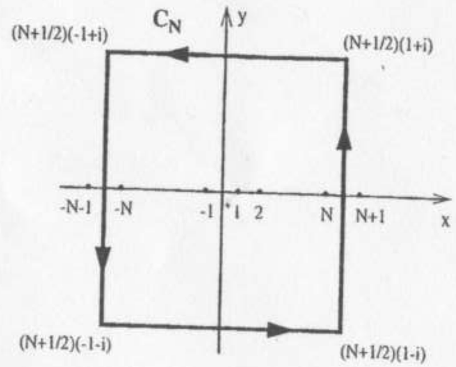
1. (C) est le cercle $|z|=\frac{1}{2}$ parcouru dans le sens direct
2. (C) est le cercle $|z|=3$ parcouru dans le sens direct
3. (C) est le carré $3\text{-}3i \to 3\text{+}3i \to \text{-}3\text{+}3i \to \text{-}3\text{-}3i \to 3\text{-}3i$

Exercice 4: (4 points) *les 2 questions sont indépendantes*

1. En posant $w = e^{iz}$, calculer $I = \displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{2\cos z - 3}dz$ où Γ est le segment $-i\ln 2 \to 2\pi - i\ln 2$
2. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos \pi x}{x^2 - 10x + 29}dx = -\frac{5\pi}{2}e^{-2\pi}$

Exercice 5: (6 points)

Soit f une fonction complexe telle que pour tout z appartenant au contour carré C_N ci-contre, on ait $|f(z)| \leq \dfrac{M}{|z|^k}$, où les constantes k>1 et M sont indépendantes de l'entier positif N.



On veut déterminer $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)$

On suppose que les singularités de f sont les m pôles $a_1, a_2, \dots, a_m$, et qu'aucun de ces pôles n'est entier (sinon la somme de la série n'existe pas).

1. a. Quels sont les pôles de la fonction $h(z) = \dfrac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}f(z)$?

   b. Avec un choix convenable de N, appliquer le théorème des résidus pour exprimer l'intégrale $\displaystyle\oint_{C_N} \frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}f(z)dz$

2. On suppose établi qu'il existe une constante A>0 telle que $\forall z \in C_N$ on a $\left|\dfrac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}\right| \leq A$

   a. Donner une majoration de $\left|\oint_{C_N} h(z)dz\right|$ en fonction de A, M, N, et k

   b. En déduire que $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\oint_{C_N} h(z)dz = 0$

3. Montrer alors que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\sum_{p=1}^{m} \text{Res}\left(\frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}f(z), a_p\right)$

4. (application) Calculer $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$