Le volume vaut donc

$$V = \int_T dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_D \rho\, d\rho\, dz = 2\pi \int_D \rho\, d\rho\, dz.$$

c) A ce point, il est commode (à cause du disque D) de refaire un changement de variables et repasser en polaires :

$$\begin{cases} \rho - R = u\cos\alpha \\ z = u\sin\alpha \end{cases} \quad \text{d'où} \quad d\rho\, dz = u\,du\,d\alpha \quad (0 < u < r,\ 0 \leq \alpha < 2\pi)\,.$$

On obtient $V = 2\pi \int_0^{2\pi} \left( \int_0^r (Ru + u^2\cos\alpha)du \right) d\alpha = 2\pi \int_0^{2\pi} [Rr^2/2 + (r^3/3)\cos\alpha]\, d\alpha = 2\pi^2 Rr^2$.

Université de Rennes 1
DIIC1 — ANAB

5 décembre 2003

# CONTRÔLE

## Exercice 1

a) Calculez l'intégrale $I(b) = \int_0^1 dx/(1+x^b)$ pour $b = 1$ et $b = 2$.

b) En utilisant le résultat de a) calculez la somme des séries $\Sigma_1^\infty (-1)^k/k$ et $\Sigma_0^\infty (-1)^k/(2k+1)$.

## Exercice 2

Calculez $\int e^{\frac{x-y}{x+y}}$ dans le triangle $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$ (commencez par poser $u = x - y$ et $v = x + y$).

## Exercice 3

On considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt.$$

a) Montrez qu'elle tend vers 0 en décroissant quand $n$ tend vers l'infini.

b) Calculez $I_0$ et $I_1$. En intégrant par parties, donnez une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n-2}$. Déduisez-en $I_n$ (deux cas selon la parité de $n$).

c) Calculez $I_n I_{n-1}$. Avec le question a), déduisez-en un équivalent de $I_n$ quand $n$ tend vers l'infini. La série $\Sigma I_n$ est-elle convergente ?

37

CHAP 7