

EXAMEN

Seul document autorisé : le cours.

Exercice 1

Quels sont les domaines de convergence des séries de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$ et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{\operatorname{ch} n}$?

Exercice 2

Calculez l'intégrale $I(a, b) = \int_{|z|=r} dz (z-a)^n (z-b)$ pour $a < r < |b|$

- a) au moyen du théorème des résidus ;
- b) au moyen de la formule de Cauchy généralisée.

Exercice 3

Calculez l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \cos t + \sin t}$$

(on rappelle que $\cos t$ et $\sin t$ sont définis à l'aide de $e^{it} = z$).

Exercice 4

a) Calculez l'intégrale suivante au moyen du théorème des résidus :

$$I(a, b) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad a, b > 0 \quad a \neq b.$$

- b) Calculez cette intégrale lorsque $a = b$ avec le théorème des résidus.
- c) Sans calcul complexe, sauriez-vous répondre au a) ? et au b) ?

Exercice 5

Soient p et q deux réels et n un entier, tous positifs. En intégrant la fonction $z^{n-1} e^{-z}$ sur le bord d'un secteur d'angle au sommet convenable, montrez les relations

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-px} \cos qx dx = \frac{(n-1)! \Re(p+iq)^n}{(p^2 + q^2)^n}$$

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-px} \sin qx dx = \frac{(n-1)! \Im(p+iq)^n}{(p^2 + q^2)^n}$$

($\Re z$ et $\Im z$ sont les parties réelle et imaginaire de z).

CHAP 7

