Université de Rennes 1
IFSIC — DIIC1

30 novembre 2004
Durée : 1 h 30

CONTRÔLE D'ANAB

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1

Rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$?

Exercice 2

Rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{an^2+bn+c}{n!} x^n$?

Quelle relation doivent vérifier a, b, c pour que la somme $\sum_{n\geq 0} \frac{an^2+bn+c}{n!}$ soit nulle ?

Exercice 3

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^3.(1+x^n)}$.
Etudiez sa convergence sur $[0,1]$. Est-elle uniforme ?
La somme de cette série est-elle dérivable sur $[0,1]$?

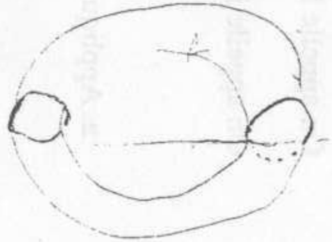
Exercice 4

Dans l'espace à trois dimensions, on considère le disque D vertical (du plan xOz) de rayon r centré en $(\mathrm{R}, 0, 0)$ avec $\mathrm{R} > r$ (ne pas hésiter à faire un dessin).

a) Quelle est l'équation de ce disque ?

b) On le fait tourner autour de Oz. Il engendre ainsi un volume appelé un tore. Quelles sont les coordonnées adaptées pour décrire ce volume ? Montrez que ce volume vaut $\int_{\mathrm{D}} x\,dx\,dz$ à une constante multiplicative près.

c) Quel est le volume du tore (on pourra refaire un changement de variables ressemblant au passage en polaires) ?



CHAP 7

Université de Rennes 1
IFSIC — DIIC1

30 novembre 2004
Durée : 1 h 30

CORRIGÉ D'ANAB

Exercice 1

La racine n-ième de $a_n x^n$ est $(1+1/n)^n x$. On en cherche un équivalent en en prenant le logarithme :

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln x = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1+\varepsilon}{2n^2}\right) + \ln x = 1 + \varepsilon + \ln x \text{ (avec } \lim_{n\to\infty} \varepsilon = 0).$$

Donc $\sqrt[n]{|a_n x^n|}$ tend vers $e|x|$ quand n tend vers l'infini. Pour que la série soit convergente, il suffit que $|x| < 1/e$.

Exercice 2

On a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{a(n+1)^2 + b(n+1) + c}{an^2+bn+c} \cdot \frac{|x|}{n+1}.$$

Le premier facteur tend vers 1 et le second vers 0 pour tout x : le rayon de convergence est infini.

La somme ci-dessus vaut $a\sum \frac{n^2x^n}{n!} + b\sum \frac{nx^n}{n!} + c\sum \frac{x^n}{n!}$.

- Le dernier terme vaut ce^x.
- Le deuxième terme s'obtient en dérivant e^x et en remultipliant par x : bxe^x.
- Le premier terme s'obtient en redérivant xe^x et en remultipliant par x : $ax(e^x + xe^x)$.

Donc la série entière vaut $e^x[ax^2 + (a+b)x + c]$. La somme donnée en est la valeur pour $x = 1$: $e(2a+b+c)$. Pour qu'elle soit nulle, il faut et il suffit que $2a + b + c = 0$.

Exercice 3

Si $0 \leq x \leq 1$, on a $0 \leq u_n \leq 1/n^3$. La série $\Sigma\, 1/n^3$ est convergente, donc $\Sigma\, u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

En dérivant, on a

$$\frac{d}{dx}u_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{nx^{n-1}(1+x^n) - x^n nx^{n-1})}{(1+x^n)^2} = \frac{1}{n^2}\frac{x^{n-1}}{(1+x^n)^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série dérivée converge uniformément ; la dérivée de la série donnée est donc la somme de la série dérivée terme à terme.

Exercice 4

a) Dans le plan xOz, l'équation du disque s'obtient en écrivant que la distance de ses points au point $(\mathrm{R}, 0)$ vaut au plus r

$$\mathrm{D} = \{(x, 0, z) ;\ (x-\mathrm{R})^2 + z^2 \leq r^2\}.$$

b) Les coordonnées adaptées sont les coordonnées cylindriques. Pour qu'un point (ρ, θ, z) appartienne au tore, il faut et il suffit qu'il vérifie l'équation ci-dessus, où on a remplacé x par ρ, indépendamment de θ : $(\rho - \mathrm{R})^2 + z^2 \leq r^2$. L'élément de volume $dxdydz$ vaut en cylindriques $\rho d\rho\, d\theta\, dz$: en effet, le changement de variables

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{a pour jacobien} \quad \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

Le volume vaut donc

$$V = \int_T dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_D \rho d\rho\, dz = 2\pi \int_D \rho d\rho\, dz.$$

c) A ce point, il est commode (à cause du disque D) de refaire un changement de variables et repasser en polaires :

$$\begin{cases} \rho - R = u\cos\alpha \\ z = u\sin\alpha \end{cases} \quad \text{d'où} \quad d\rho\, dz = u\,du\,d\alpha \quad (0 < u < r,\ 0 \leq \alpha < 2\pi).$$

On obtient $V = 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r (Ru + u^2 \cos\alpha) du \right) d\alpha = 2\pi \int_0^{2\pi} [Rr^2/2 + (r^3/3)\cos\alpha]\, d\alpha = 2\pi^2 R r^2.$

CHAP 7

Université de Rennes 1
DIIC1 — ANAB

5 décembre 2003

CONTRÔLE

Exercice 1

a) Calculez l'intégrale $I(b) = \int_0^1 dx/(1+x^b)$ pour $b = 1$ et $b = 2$.

b) En utilisant le résultat de a) calculez la somme des séries $\Sigma_1^\infty (-1)^k/k$ et $\Sigma_0^\infty (-1)^k/(2k+1)$.

Exercice 2

Calculez $\int e^{\frac{x-y}{x+y}}$ dans le triangle $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$ (commencez par poser $u = x - y$ et $v = x + y$).

Exercice 3

On considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt.$$

a) Montrez qu'elle tend vers 0 en décroissant quand n tend vers l'infini.

b) Calculez I_0 et I_1. En intégrant par parties, donnez une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}. Déduisez-en I_n (deux cas selon la parité de n).

c) Calculez $I_n I_{n-1}$. Avec le question a), déduisez-en un équivalent de I_n quand n tend vers l'infini. La série $\Sigma\, I_n$ est-elle convergente ?

37