IFSIC
INSTITUT DE FORMATION SUPÉRIEURE en INFORMATIQUE et COMMUNICATION

Université de Rennes I

DIIC 1ère année

Contrôle continu n°1

MAT1

Lundi 17 octobre 2005
Durée : 2 heures
Cours autorisé
Calculatrice interdite

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation

---

Exercice 1 :

Soit les affirmations :

(a) Si Paul plante des salades, alors s'il n'arrose pas, elles ne vont pas pousser.
(b) Si les salades ne poussent pas et si le chat dort dans le potager, alors Paul est triste.
(c) Si Paul aime jardiner, alors le chat dort dans le potager et Paul n'est pas triste.

1. Exprimer ces trois affirmations au moyen de connecteurs et de propositions.
2. Montrer qu'on peut en déduire que "si Paul plante des salades et s'il n'arrose pas, alors il n'aime pas jardiner".
3. Donner la négation de (b) sans commencer par "il est faux que..."

Exercice 2 :

1. Soit $P(n)$ le prédicat $\{9 \text{ divise } 10^n - 1\}$
$Q(n)$ le prédicat $\{9 \text{ divise } 10^n + 1\}$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$. A-t-on $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$?
b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$. A-t-on $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$?

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111.

Exercice 3 :

Soit E un ensemble à n éléments ;
Soit A et B des parties de E telles que $A \cap B = \varnothing$, Card(A)=n_1 et Card(B)= n_2 ; ($n_1+n_2 \leq n$)
Soit p un entier tel que $2 \leq p \leq n$;

1. Déterminer le nombre de parties de E à p éléments contenant *exactement* un élément de A et un élément de B.
2. Déterminer le nombre de parties de E à p éléments contenant *au moins* un élément de A et un élément de B.
Donner le résultat numérique pour n=10, n_1=2, n_2=4, p=6.

CHAP 6

3. On se place maintenant dans le cas E est l'ensemble des lettres de l'alphabet, A l'ensemble des 6 voyelles, et B l'ensemble des 20 consonnes ($n_1+n_2 = n$).

   Déterminer le nombre de mots différents que l'on peut écrire avec 5 lettres dont 3 consonnes et 2 voyelles dans les deux cas suivants :

   a. toutes les lettres sont distinctes

   b. toutes les lettres sont quelconques (*question bonus, hors barème...*)

Exercice 4 :

On considère la relation binaire définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$a \,\mathfrak{R}\, b \iff a^2 \equiv b^2 \pmod 5$$

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$
2. Déterminer la classe d'un élément a de $\mathbb{Z}$.
3. Donner la classe de 0, la classe de 1. Combien y a-t-il de classes ? (donner l'ensemble des classes)
4. Etant donnés deux entiers a et b quelconques, a-t-on $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$?

Exercice 5 :

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - 5x - 11 \equiv 0 \pmod{17}$
2. Donner l'inverse de 7 dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$.
3. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$?

Chap 6