Université de Rennes1
DIIC1 – MAT1

lundi 28 novembre 2005
Durée 2 heures

CONTRÔLE N° 2

Cours autorisé, calculatrice interdite

Exercice 1

Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ et la calculer.

Exercice 2

On considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{n\sqrt{x}}{1+nx}$.

1) Étudier rapidement ses variations et tracer son graphe, pour $n \geq 1$.
2) Étudier la convergence simple, uniforme de la suite (f_n).
3) Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ (on justifiera soigneusement ce calcul).

Exercice 3

Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(nx)^n}{n!}$?

Exercice 4

a) Calculer le volume de l'intersection de la boule $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 ;\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ et du cylindre $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 ;\ x^2+y^2-x \leq 0\}$; on pourra utiliser les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) où

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

b) Déduisez-en le volume de l'intersection du cylindre $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 ;\ x^2+y^2-ax \leq 0\}$ avec l'ellipsoïde $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 ;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2} \leq 1\}$.

CHAP 7