

CONTRÔLE N° 1

Aucune calculatrice, aucun document n'est autorisé.

Exercice 1

On considère que les trois hypothèses suivantes sont vraies :

A = Si Marc cuisine, alors si c'est vendredi alors il prépare du poisson.

B = Si Marc prépare du poisson et si le téléphone sonne, alors il est de mauvaise humeur.

C = Si Marc pense à Sophie, alors le téléphone sonne et il est de bonne humeur.

- Exprimer ces hypothèses dans le langage des propositions.
- Montrer qu'on peut déduire des hypothèses précédentes la conclusion : si Marc cuisine et si c'est vendredi, alors il ne pense pas à Sophie.
- On définit les prédicats $C(X) = X$ cuisine, et $P(X, Y) = X$ pense à Y .
Exprimer avec des quantificateurs les affirmations suivantes :
I = Toutes les personnes qui pensent à Sophie cuisinent.
J = Certaines personnes pensent à toutes les personnes qui cuisinent.
- Donner en français la négation de la conclusion de la question b) sans commencer par «il est faux que...»

Exercice 2

On considère une application $f : E \rightarrow E$, et deux parties quelconques A et B de E.

- On suppose f injective. Montrez l'égalité $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
- Dorénavant f est quelconque. A-t-on encore $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ (démonstration ou contre-exemple) ?
- f est toujours quelconque. On note $f^{-1}(X) = \{e \in E; f(e) \in X\}$. A-t-on $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ (démonstration ou contre-exemple) ?

Exercice 3

Dans une entrée, plusieurs personnes échangent une poignée de main avec leurs amis (éventuellement avec personne, éventuellement avec tout le monde). Montrez que deux personnes ont serré le même nombre de mains.

Exercice 4

Combien y a-t-il de permutations distinctes des mots suivants :

- BARIL ?
- BARBE ?
- BARBARA ?

Exercice 5

Calculer $d = \text{pgcd}(1099, 476)$ et deux entiers u et v tels que $1099u + 476v = d$.

Exercice 6

Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $4x + 5 \equiv 19 \pmod{6}$.