Université de Rennes1
DIIC1 – MAT1

lundi 15 janvier 2007
Durée 2 heures

CONTRÔLE N° 3

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1

Dessiner l'image du carré de sommets $0, 1, 1+i, i$ par l'application $z \mapsto z^2$ (on pourra paramétrer successivement chaque côté du carré).

Exercice 2

a) Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}$.

Exercice 3

Soit f une fonction holomorphe au voisinage du disque unité. Calculez les intégrales

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 d\theta \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

(on pourra en faire la somme et la différence).

Exercice 4

a) Soit f une fonction méromorphe au voisinage d'un point a. Quel est le résidu de $\dfrac{df(z)}{f(z)}$ au point a (on posera $z = a + h$ pour développer df/f au voisinage de $h = 0$) ?

b) Soit f une fonction méromorphe non constante au voisinage d'un compact K et n'ayant ni zéro ni pôle sur le bord ∂K de K. Que vaut l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \mathrm{K}} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} \ ?$$

Exercice 5

Soit D un ouvert du plan, borné connexe et soient $\mathrm{P}_1, \dots \mathrm{P}_n$ des points donnés du plan. Montrez que le produit $\mathrm{PP}_1 \cdot \mathrm{PP}_2 \cdots \mathrm{PP}_n$ des distances aux P_i d'un point P appartenant à la fermeture $\overline{\mathrm{D}}$ de D atteint son maximum en un point de la frontière de D.

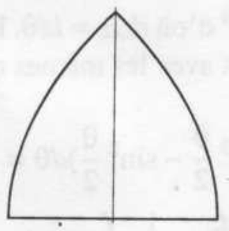
CHAP 7

Université de Rennes1 lundi 15 janvier 2007
DIIC1 – MAT1 Durée 2 heures

CORRIGÉ N° 3

Exercice 1

On paramètre chaque côté du carré par une variable réelle $t \in [0,1]$.
côté $[0,1]$: $z = t$ d'où $z^2 = t^2$: l'image est le segment de droite $[0,1]$.
côté $[1, 1+i]$: $z = 1 + it$ d'où $z^2 = 1 - t^2 + 2it$, soit $x = 1 - t^2$ et $y = 2t$, soit encore $x = 1 - \frac{1}{4}y^2$ $(0 \le y \le 2)$. C'est un segment de parabole.
côté $[1+i, i]$: $z = t + i$ d'où $z^2 = t^2 - 1 + 2it$, soit $x = -1 + t^2$ et $y = 2t$, soit encore $x = -1 + \frac{1}{4}y^2$ $(0 \le y \le 2)$. C'est un segment de parabole.
côté $[i, 0]$: $z = it$ d'où $z^2 = -t^2$: l'image est le segment de droite $[0, -1]$.



Exercice 2

a) La fonction est paire et l'intégrale vaut donc $\frac{1}{2}\int_{\mathrm{R}} \frac{dx}{x^4+1}$. Elle se calcule de façon standard en intégrant sur le bord du demi-disque supérieur de rayon R et en faisant tendre R vers l'infini.

Les pôles de $dx/(z^4+1)$ sont les solutions de $z^4 = -1$. Comme le problème est multiplicatif, on passe en coordonnées polaires et on trouve $z_0 = e^{i\pi/4}$, $z_1 = e^{3i\pi/4}$, $z_2 = e^{5i\pi/4}$ et $z_3 = e^{7i\pi/4}$. Seuls z_0 et z_1 sont dans le demi-plan supérieur et ils ne sont pas sur le bord du disque pour R assez grand.

On divise le bord en deux parties : l'intervalle $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ et le demi-cercle $\mathrm{C_R}$ de rayon R. L'intégrale sur le demi-cercle est équivalente à $2\pi\mathrm{R}/\mathrm{R}^4$ et tend vers 0 quand R tend vers l'infini. L'intégrale sur $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ tend vers 2I et vaut, d'après le théorème des résidus $2\pi i[\mathrm{Res}(dz/(z^4+1), z_0) + \mathrm{Res}(dz/(z^4+1), z_1)]$.

CHAP 7

Or le résidu de $dz/(z^4+1)$ se calcule de façon standard : $z = z_i + h$ donne

$$\frac{dz}{z^4+1} = \frac{dh}{z_i^4 + 1 + 4z_i^3 h + 6z_i^2 h^2 + 4z_i h^3 + h^4}$$
$$= \frac{1}{4z_i^3}\frac{dh}{h}(1 + h(\dots))$$

Le résidu vaut donc $1/4z_i^3$, soit en multipliant haut et bas par z_i et en tenant compte du fait que $z_i^4 = -1$: $-z_i/4$. D'où

$$\mathrm{I} = -\frac{\pi i}{4}[e^{i\pi/4} + e^{3i\pi/4}] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}}{2i}\right] = \frac{\pi}{2}\sin(\pi/4) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

b) On pose u = ce qui nous embête, ici $u = \sqrt{x}$, d'où $x = u^2$ et $dx = 2udu$.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)} = \int_0^\infty \frac{2du}{u^4+1} = 2\mathrm{I} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 3

En faisant la somme

$$\mathrm{S} = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\Big(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\Big)d\theta = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta = \int_{\mathrm{C}} f(z)\frac{dz}{iz}$$

avec le changement de variable $z = e^{i\theta}$ d'où $dz/z = id\theta$. La formule intégrale de Cauchy déduit $\mathrm{S} = 2\pi f(0)$. En faisant la différence et avec les mêmes notations,

$$\mathrm{D} = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})d\theta = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos(\theta)d\theta$$
$$= \int_{\mathrm{C}} f(z)\frac{z + 1/z}{2}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i}\int_{\mathrm{C}} f(z)dz + \frac{1}{2i}\int_{\mathrm{C}} f(z)\frac{dz}{z^2}.$$

La première intégrale est nulle parce que la fonction est holomorphe (théorème de Cauchy) et la seconde vaut $\pi f'(0)$ d'après la formule de Cauchy généralisée. D'où les valeurs des intégrales demandées :

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta = \frac{\mathrm{S}+\mathrm{D}}{2} = \frac{\pi}{2}[2f(0) + f'(0)]$$
$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta = \frac{\mathrm{S}-\mathrm{D}}{2} = \frac{\pi}{2}[2f(0) - f'(0)].$$

Exercice 4

a) Par définition, la fonction f est méromorphe au point a si, en posant $z = a + h$, on a

$$f(a+h) = a_n h^n + a_{n+1}h^{n+1} + \cdots = h^n(a_n + ha_{n+1} + \cdots) = h^n g(h) \qquad (g(0) = a_n \neq 0)$$

CHAP 7

où $n \in \mathbf{Z}$ (positif, nul ou négatif) et $g(h)$ est holomorphe non nulle ($a_n \neq 0$) au voisinage de a. Par conséquent,

$$\frac{f'(a+h)}{f(a+h)} = \frac{n}{h} + \frac{g'(h)}{g(h)}$$

où $g'(h)/g(h)$ est holomorphe au voisinage de 0 puisque g y est non nulle. Le résidu, coefficient de $1/h$ dans le développement de $\frac{f'(a+h)}{f(a+h)}$ est n : l'ordre du zéro de f en a si a et un zéro de f, l'opposé de l'ordre du pôle de f en a si a est un pôle de f, et 0 autrement.

b) On applique le théorème des résidus à la fonction méromorphe $f'(z)/f(z)$ et on trouve que l'intégrale demandée vaut la somme des ordres de multiplicité des zéros de f dans K moins la somme des ordres de multiplicité des pôles de f dans K.

Exercice 5

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PP}_i}$ vaut $z_i - z$ et sa longueur vaut $|z_i - z|$. La norme d'un produit de complexes est le produit de leurs normes. Donc

$$\mathrm{PP}_1 \cdot \mathrm{PP}_2 \cdots \mathrm{PP}_n = |(z_1 - z)(z_2 - z) \cdots (z_n - z)|.$$

La fonction $f(z) = (z_1 - z)(z_2 - z) \cdots (z_n - z)$ est holomorphe et vérifie donc le principe du maximum : elle n'admet aucun maximum, même local, dans U. Comme U est borné, sa fermeture $\overline{\mathrm{U}}$ est fermée bornée, donc compacte et la fonction continue f y est bornée et atteint ses bornes. En particulier elle admet un maximum. Comme il ne peut être dans U, il est sur la frontière.

CHAP 7