Université de Rennes 1
DIIC1 — MAT1

12 janvier 2009
durée 2 heures

CONTRÔLE N° 2

Aucune calculette, aucun document n'est admis.

Exercice 1

Quelle est la différentielle au point (x,y) de la fonction de deux variables réelles $\ln(e^{x^2} + e^{y^2})$?

Exercice 2

On considère une hypocycloïde décrite par un point d'un cercle de rayon 1 roulant sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon 3, paramétrée par $\gamma : t \mapsto z = 2e^{it} + e^{-2it}$. Tracer $\gamma(0)$, $\gamma(2\pi/3)$, $\gamma(4\pi/3)$ et les tangentes en ces points.

a) Quelle est la période de γ ? Peut-on trouver une translation sur t conservant la courbe, mais globalement et non plus point par point ?

b) Calculez la différentielle dz, et $|dz| = ds$. Calculez la longueur de la courbe.

Exercice 3

a) Calculez l'intégrale $\mathrm{I}(2) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

b) Calculez l'intégrale $\mathrm{I}(n) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, pour $n \geq 1$.

Exercice 4

Étant donné trois complexes a, b et c, calculez l'intégrale

$$\mathrm{I}(a,b,c) = \int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)(z-b)(z-c)} \qquad \text{pour} \quad r > |a|, |b|, |c|$$

a) au moyen du théorème des résidus,

b) au moyen de la formule de Cauchy.