

## Contrôle continu n 1 en Mathématiques

ESIR, semestre 1, année 2012-2013

Soit la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. La fonction  $f$  est-elle continue en  $(0, 0)$ ? Justifiez votre réponse.

La fonction  $f$  est continue en  $(0, 0)$  si et seulement si (ssi)  $f$  tend vers  $f(0, 0)$  quand  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ . Or, en posant  $x = \rho \cos(\theta)$  et  $y = \rho \sin(\theta)$ , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'énoncé, on a  $f(0, 0) = 0$ . Par conséquent, la fonction  $f$  est bien continue en  $(0, 0)$ .

2. Calculer des dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$ , tout d'abord en  $(x, y) \neq (0, 0)$ , puis en  $(x, y) = (0, 0)$ .

Les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$  en  $(x, y) \neq (0, 0)$  valent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{2yx^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

En ce qui concerne les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$  en  $(x, y) = (0, 0)$ , elles valent toutes deux 0. Pour le démontrer, il suffit de revenir à la définition première de la dérivée en termes de limite du taux d'accroissement, sachant qu'une dérivée partielle n'est autre qu'une dérivée par rapport à l'une des variables :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 \times 0^2}{h^2 + 0^2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

De même pour la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $y$  en  $(x, y) = (0, 0)$  on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0^2 \times h^2}{0^2 + h^2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= 0\end{aligned}$$

3. La fonction  $f$  est-elle différentiable en  $(0, 0)$ ? Justifiez votre réponse.

D'après l'un des théorèmes du cours, la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en  $(0, 0)$  ssi toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues en  $(0, 0)$ . Or c'est bien le cas pour la fonction  $f$  donnée dans l'énoncé du contrôle. En effet, en posant  $x = \rho \cos(\theta)$  et  $y = \rho \sin(\theta)$ , on a :

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\rho \cos(\theta) \sin(\theta)^4 \\ &= 0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2yx^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\rho \cos(\theta)^4 \sin(\theta) \\ &= 0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\end{aligned}$$

La fonction  $f$  de l'énoncé est par conséquent de classe  $\mathcal{C}^1$  en  $(0, 0)$  et donc différentiable en  $(0, 0)$ .