

Méthodes mathématiques (Durée 2H, calculatrice et cours manuscrit autorisés)

Exercice 1 :

On note S_n le groupe des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ muni de la composition des applications (notée \circ). Si p et q sont deux nombres entiers compris entre 1 et n , on note (p, q) la transposition qui échange p et q sans modifier les autres nombres.

1) calculer : $(i, i+1) \circ \left((i+1, i+2) \circ \left((i+1, i+2) \circ (i, i+1) \right) \right)$ $i \in \{1, \dots, n-3\}$.

2) On note P l'ensemble des $n-1$ transpositions : $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$. En généralisant les formules du 1) expliquez comment on peut écrire une transposition quelconque (i, j) comme produit d'éléments de P (on dit alors que P engendre S_n). Dans cette question, on ne donnera pas de démonstration.

3) On considère la transposition : $t = (1, 2)$ et le cycle : $s = (1, 2, \dots, n)$ du groupe S_n . Calculer $s \circ t \circ s^{-1}, s^2 \circ t \circ s^{-2}$ et en déduire $s^k \circ t \circ s^{-k}$ pour k entier quelconque.

4) Montrer que t et s engendrent S_n .

Exercice 2 :

On note E_n l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} , de degré inférieur ou égal à n : $E_n = \left\{ P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n, (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}$ muni de l'addition des polynômes et du produit d'un polynôme par un réel définis par :

$$P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n, Q(X) = b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n, \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$P + Q(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \dots + (a_n + b_n)X^n, \lambda \cdot P(X) = \lambda a_0 + \lambda a_1X + \dots + \lambda a_nX^n.$$

On note B la base canonique : $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de E_n .

1) On considère l'application f définie par : $f : \begin{cases} E_n \rightarrow E_n \\ P(X) \mapsto P(X+1) \end{cases}$. Montrer que f est un endomorphisme et que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, les coordonnées de $f(X^k)$ dans B sont :

$$(C_k^0, C_k^1, \dots, C_k^k, 0, \dots, 0). \text{ Écrire la matrice } M \text{ de } f \text{ dans } B.$$

2) Montrer que f est bijective et calculer la matrice de f^{-1} .

3) Résoudre, en fonction de $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = b_0 \\ x_1 + C_2^1 x_2 + C_3^1 x_3 + \dots + C_n^1 x_n = b_1 \\ x_2 + C_3^2 x_3 + \dots + C_n^2 x_n = b_2 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

- 4) On utilise le produit scalaire sur l'espace E_n , défini par : $P \cdot Q = \int_a^b P(x)Q(x)dx$. Calculer $X^i \cdot X^j$ pour i et $j \in \{0, \dots, n\}$. Montrez que $(1, \sqrt{3}(2X-1), \sqrt{5}(6X^2-6X+1))$ constitue une base orthonormée de E_2 .

Exercice 3 :

On considère la fonction f périodique de période $a > 0$, définie par : $f(t) = \frac{t}{a}$ si $0 \leq t < a$.

- 1) Représenter graphiquement f .
- 2) On note comme d'habitude $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier réels de f . Calculer $a_0(f)$; montrer, en utilisant une intégration par parties, que $a_n = 0$ pour $n \geq 1$. Calculer les coefficients b_n .
- 3) Calculer les coefficients de Fourier complexes de f : $c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}$. En utilisant l'égalité de Plancherel, calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.