Université de Rennes I
Janvier 2003
Magistère Matériaux 1ère année

Physique Quantique
(Une feuille de notes format A4 autorisée)
Durée : 2H

I

Deux opérateurs A et B ont pour matrices représentatives sur une base de vecteurs $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$: $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix}$ où a et b sont des constantes réelles.

1) Les opérateurs A et B sont-ils hermitiques ?

2) Calculer le commutateur [A, B].

3) Quels sont les valeurs et les vecteurs propres de A ? Même question pour l'opérateur B.

4) Déterminer une base formée de vecteurs propres communs à A et B. Indiquer les valeurs propres correspondantes.

II

On considère une onde plane d'énergie E , qui rencontre une marche de potentiel :

$$V(x) = 0 \text{ pour } x \leq 0$$

$$V(x) = V_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \text{ pour } x > 0$$

1) On suppose que l'énergie E est supérieure à V_0, et que la particule vient de $-\infty$.

1.a) Ecrire les solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour $x \leq 0$ et $x > 0$. Quelles sont les solutions physiquement acceptables ?

1.b) Raccorder ces solutions en x = 0.

1.c) Calculer les facteurs de réflexion R et de transmission T.

2) Reprendre les questions précédentes pour une onde de même énergie venant de $+\infty$. Comparer les facteurs R et T aux valeurs trouvées en 1.c).

3) On suppose maintenant que $E < V_0$ et l'onde vient de $-\infty$. Calculer les facteurs R et T.

III

1) Rappeler (sans démonstration) l'expression des énergies propres d'un oscillateur harmonique quantique à une dimension.

2) On considère un système de deux oscillateurs harmoniques identiques et couplés, dont l'hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_2^2 + \frac{1}{2} k(x_1 - x_2)^2$$ où k est une constante de couplage.

2.a) On étudie le système dans le référentiel lié au centre de masse et on effectue les changements de variable suivants :

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2} \;;\; x = x_1 - x_2$$

$$P = 2m\frac{dX}{dt} \;;\; p = \frac{m}{2}\frac{dx}{dt}$$

Montrer que l'hamiltonien H s'écrit de nouveau :

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2} M\omega^2 X^2 + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\Omega^2 x^2$$

Exprimer les termes M, μ et Ω en fonction de m, ω et k.

2.b) Donner (sans calcul) les énergies propres associées au système quantique correspondant à l'hamiltonien H. En supposant que la constante k est beaucoup plus petite que $m\omega^2$, écrire l'expression des énergies au premier ordre en k. Représenter les six premiers niveaux d'énergie et les nombres quantiques associés.