

Durée : 1h30

Documents autorisés : résumés pdf de cours distribués, 1 feuille A3 R+V notes personnelles

Exercice 1

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer simultanément 3 pièces de monnaie P_1, P_2, P_3 . On introduit les VA $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$ et $Y_2 = X_1 + X_3$ où les 3 VA X_1, X_2, X_3 sont définies par :

$X_1 = 1$ si P1 montre pile et $X_1 = -1$ sinon

$X_2 = 2$ si P2 montre pile et $X_2 = -2$ sinon

$X_3 = a$ si P3 montre pile et $X_3 = -a$ sinon ($a > 2$ est un réel positif).

Les résultats des 3 pièces sont supposés mutuellement indépendants.

- 1) Les VA Y_2 et X_2 sont elles indépendantes ? On pourra se contenter de donner un argument intuitif.
- 2) Calculer les valeurs moyennes de Y_1 et de $Z = Y_1 Y_2$.
- 3) donner la loi de probabilité (ici une distribution de probabilité) de la VA $T = Y_1 + Y_2$ et représenter la fonction de répartition correspondante.

Exercice 2

- 1) Proposez un code Matlab permettant de générer 1000 tirages indépendants d'une variable aléatoire suivant une même loi uniforme entre -1 et 1, et de représenter un histogramme pour ces tirages.
- 2) On se propose d'appliquer la méthode d'inversion de la fonction de répartition pour générer des nombres aléatoires suivant une loi de fonction de répartition définie par :

$$F(x) = x^2, x \in [0,1]; F(x) = 0, x < 0; F(x) = 1, x > 0,$$

et ceci sous la forme $X = h(U)$, où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

2.1) Déterminer la fonction h .

2.2) Proposez un code Matlab permettant de générer 1000 tirages indépendants de cette variable aléatoire.

Exercice 3

La durée X nécessaire au traitement d'une tâche sur un processeur (commencée en $t = 0$) est considérée comme étant aléatoire, de loi exponentielle avec un paramètre $a \in \mathbb{R}^+$, i.e. de densité $p_X(x) = a \exp(-ax) 1_{x \geq 0}, x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que sur \mathbb{R}^+ la fonction de répartition de X a pour expression $F_X(x) = 1 - \exp(-ax)$.

2) Montrer que $E(X) = 1/a$.

3) Montrer que la probabilité pour que $X < t_0 + d, d > 0$, conditionnelle à ce qu'en $t = t_0 \geq 0$ la tâche ne soit pas encore terminée, ne dépend pas de d .

4) On suppose ici que la même tâche est lancée (simultanément en $t = 0$) sur 2 processeurs P1 et P2 et que les durées d'exécution X_1, X_2 correspondantes sont modélisables sous la forme de deux variables aléatoires indépendantes, chacune de loi exponentielle, de paramètres respectifs $a_1 \in \mathbb{R}^+, a_2 \in \mathbb{R}^+$. On récupère les résultats dès l'instant où un des deux processeurs a terminé son exécution. Notant Y la VA correspondant à cet instant, donner la fonction de répartition de Y ainsi que sa densité de probabilité.