Université de Rennes 1 Jeudi 1er décembre 2011

ESIR1- Module PS – CC1 en Probabilités

NOM: **PRENOM:**

Durée: 3/4 h

Documents autorisés: 1 feuille recto-verso A3 (2xA4) de notes personnelles

EXERCICE 1

On lance une pièce de monnaie (suite d'essais mutuellement indépendants) jusqu'à obtenir pile pour la première et on note X la VA (variable aléatoire) égale au nombre d'essais nécessaire pour y parvenir. La probabilité d'obtenir pile sur un essai est $p \in]0,1[$.

2.1 Donner la distribution de probabilité $P(X=k), k=1,2,..$ de la VA X .

$P(x=k) = P(k-1 \ \textit{fois face et face au kème essai}) = (1-p)^{k-1} p, k=1,..$

2.2 Cette fois on considère qu'on poursuit l'expérience jusqu'à obtenir deux fois le résultat pile et on note Y le nombre d'essais nécessaire et suffisant pour y parvenir. Par exemple pour (face,pile,face,face,pile,face,...) on aura $Y=5$. Donner la distribution de probabilité $P(Y=k), k=2,3,..$ de la VA Y .

$P(Y=k) = P(\textit{pile en } k) \times P(\textit{une fois pile entre } 1 \textit{ et } k-1)$

= $P(\textit{une fois pile entre } 1 \textit{ et } k-2 \textit{ fois faces sur } \{1,..,k-1\}) = (1-p)^{k-2} p(k-1)$ car $(k-1)$ façons de placer une fois pile sur $\{1,..,k-1\}$ qui correspondent à des événements disjoints et donc

$P(Y=k) = p(k-1)(1-p)^{k-2} p = (k-1)(1-p)^{k-2} p^2$

EXERCICE 2

La fonction de répartition d'une VA X dont l'allure générale est donnée figure (1) est telle que $\forall x \in [0,2] : F_X(x) = \alpha x(x-4)$.

2.1 Montrer que $\alpha = -1/4$ et calculer $P(X \geq 1 / X \geq 0.5)$

$F_X(2) = \alpha 2(-2) = 1 \Rightarrow \alpha = -1/4$

$P(X \geq 1 / X \geq 0.5) = P(X \geq 1) / P(X \geq 0.5) = (1 - F_X(1)) / (1 - F_X(0.5)) = (1/4)/(9/16) = 4/9$

NOM: **PRENOM:**

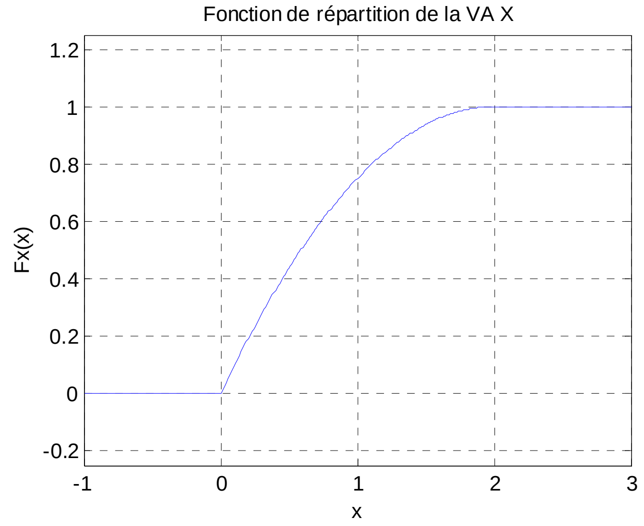
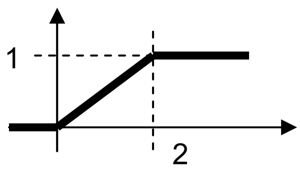


Figure (1)

2.2 Représenter graphiquement la densité de probabilité $p_X(x)$ correspondante pour $x \in \mathbb{R}$ et calculer $E(X)$.

$$p_X(x) = 0, x < 0 \; ou \; x > 2$$
$$= \left(1 - x/4\right) - x/4 = 1 - x/2, x \in \left(0,2\right)$$
$$E(X) = \int_0^2 x(1 - x/2)dx = \left[x^2/3 - x^3/6\right]_0^2 = 2/3$$

2.3 Y est une VA de loi uniforme sur $[0,2]$ indépendante de X. Représenter graphiquement la fonction de répartition F_Y.



$$F_Y(y) = y/2, y \in [0,2]$$

2.4 Pour $Z = \max(Y, X)$, que vaut $F_Z(z) = P(Z < z)$ pour $z < 0$, pour $z > 2$ pour $0 \le z \le 2$.

$$P'Z < z) = P(X < z, Y < z) = P(X < z)P(Y < z) = F_X(z)F_Y(z)$$
$$= 0, z \le 0$$
$$= 1, z \ge 2$$
$$= (z/2)(1 - z/4)z = (z^2/2)(1 - z/4), 0 < z < 2$$