L3 PCMA – PARCOURS MATERIAUX

U.E. 28 Vibrations 1 – **Examen final** – (2h) – 12/01/2007

CORRIGE

Etude d'une chaîne d'oscillateurs électriques couplés.

La Figure 1 représente une cellule électrique comportant deux bobines identiques d'auto-inductance L ainsi qu'un condensateur de capacité C.

A. A $t = 0$, LE CONDENSATEUR EST DECHARGE, ET ON INJECTE UN COURANT ELECTRIQUE $i(0) = I_0$ DANS LE CIRCUIT.

1. Refaire un schéma du circuit présenté Figure 1 en précisant le sens du courant électrique $i(t)$ choisi.

C.f. Figure 1

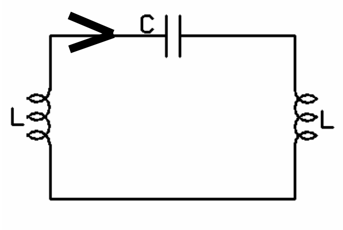


Figure 1 : Cellule L-C-L

2. Exprimer la loi des mailles dans ce circuit, et en déduire l'équation différentielle gouvernant l'évolution de la charge $q(t)$ du condensateur. On précisera sur le schéma sur quelle armature se situe cette charge, sachant que par convention $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$.

L'armature qui porte la charge q(t) est celle qui reçoit le courant (celle de gauche sur la Figure 1). La loi des mailles s'écrit :

$$U_{L1} + U_C + U_{L2} = 0$$
$$L\frac{di_1}{dt} + \frac{q}{C} + L\frac{di_1}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{1}{2LC}q = 0$$

3. Donner la solution générale de cette équation, et en déduire le courant $i(t)$ circulant dans le circuit en tenant compte des conditions initiales.

La solution générale s'écrit $q(t) = Q_{max}\cos(\omega_0 t + \phi)$. La pulsation des oscillations est donnée par $\omega_0^2 = \frac{1}{2LC}$. En tenant compte des conditions initiales, on doit avoir $q(0) = 0 = Q_{max}\cos(\phi)$, soit

$\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ et on peut choisir d'écrire $q(t) = Q_{max} \sin(\omega_0 t)$. De plus $i(t) = \frac{dq}{dt}$, soit $i(t) = \omega_0 Q_{max} \cos(\omega_0 t) = I_0 \cos(\omega_0 t)$. On a donc $Q_{max} = \frac{I_0}{\omega_0}$.

B. ON COUPLE MAINTENANT CETTE CELLULE AVEC UNE DEUXIEME IDENTIQUE (C.F. FIGURE 2).

Le couplage est réalisé par inductance mutuelle, de coefficient M. On rappelle quel ce coefficient va d'une valeur nulle (pas de couplage) à la valeur L (couplage parfait), et que l'expression de la tension au bornes de la bobine de gauche (selon les conventions de sens des courants de la Figure 3) est :

$$u_{L1} = L\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} \qquad (1)$$

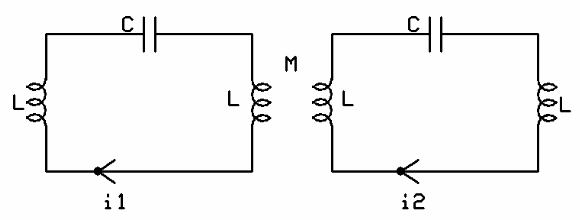


Figure 2 : Deux cellules couplées par mutuelle inductance

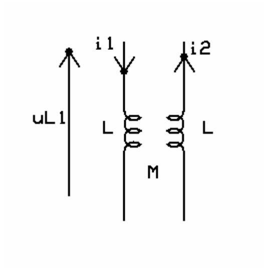


Figure 3 : Conventions pour l'équation (1)

4. Quelles sont les valeurs d'équilibre des courants i_1 et i_2 ? Justifier. Comment se comporte ce circuit en dehors de cet équilibre ?

Les courants d'équilibre sont forcément nuls : il n'y a pas de source dans le circuit, et la valeur d'équilibre étant un courant continu, celui-ci n e peut exister en présence d'une capacité série. En dehors de l'équilibre à courants nuls, les courants oscillent de manière sinusoïdale.

5. Définir la notion de modes propres d'oscillation des courants. Combien de modes propres le circuit de la Figure 2 comporte-t-il ?

Un mode propre d'oscillation pour ce circuit correspond à un état du système pour lequel les deux courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ oscillent à la même pulsation propre ω_m. On a autant de modes que de courants indépendants, soit 2 modes.

6. Ecrire les lois des mailles pour les deux cellules couplées. On notera (impérativement) q_n ($n = 1$ ou 2) la charge du condensateur de la cellule numéro n. On utilisera aussi impérativement les conventions de sens des courants définies par les figures 2 et 3.

$$\begin{cases} L\frac{di_1}{dt} + \frac{q_1}{C} + L\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} = 0 \\ L\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} + \frac{q_2}{C} + L\frac{di_2}{dt} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2L\frac{d^2q_1}{dt^2} - M\frac{d^2q_2}{dt^2} = -\frac{q_1}{C} \\ -M\frac{d^2q_1}{dt^2} + 2L\frac{d^2q_2}{dt^2} = -\frac{q_2}{C} \end{cases}$$

7. Montrer que ces lois des mailles peuvent s'écrire de manière matricielle sous la forme :

$$[A]\left|\ddot{q}(t)\right\rangle = -\omega_0^2\left|q(t)\right\rangle \qquad (2)$$

où $[A]$ est une matrice que l'on exprimera en fonction du paramètre $\gamma = \dfrac{M}{2L}$. Donner l'expression de ω_0.

En divisant le dernier système d'équations par *2L*, il vient $[A]\left|\ddot{q}(t)\right\rangle = -\omega_0^2\left|q(t)\right\rangle$, à condition de poser :

$\left|q(t)\right\rangle = \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix}$ et $[A] = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}$.

8. En déduire la matrice dynamique $\left[\Omega_0^2\right]$ du système telle que

$$\left|\ddot{q}(t)\right\rangle = -\left[\Omega_0^2\right]\left|q(t)\right\rangle \qquad (3)$$

Il suffit de multiplier la forme précedente par l'inverse de $[A]$, pour définir $\left[\Omega_0^2\right] = \omega_0^2[A]^{-1} = \dfrac{\omega_0^2}{1-\gamma^2}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$.

9. Déterminer les pulsations propres ω_n et les vecteurs propres associés. Quel est le déphasage entre les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ dans chacun de ces modes propres ?

On détermine les pulsations propres en résolvant $\det\left[\Omega_0^2 - \omega_n^2[1]\right] = 0$, soit pour simplifier $\begin{vmatrix} 1-\lambda & \gamma \\ \gamma & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = \gamma^2 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \gamma$ soit : $\omega_n^2 = \dfrac{\omega_0^2}{1-\gamma^2}\lambda = \omega_0^2\dfrac{1\pm\gamma}{1-\gamma^2} = \dfrac{\omega_0^2}{1\mp\gamma}$.

Pour déterminer les phases relatives des courants, il faut connaître la forme de ces modes, c'est-à-dire trouver les vecteurs propres correspondant à ces 2 pulsations :

$$\frac{1}{1-\gamma^2}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{1-\gamma^2}\begin{vmatrix} q_1 + \gamma q_2 \\ \gamma q_1 + q_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{1\pm\gamma}\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix}$$

La pulsation propre la plus basse correspond au signe + ; dans ce cas, l'équation précédente mène à $q_1 = -q_2$. Le vecteur propre correspondant est $\left|1\right\rangle = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$, les charges (et donc les courants) oscillent en opposition de phase.

Un calcul similaire montre que pour le mode de plus haute fréquence, (signe -), le vecteur propre est $\left|2\right\rangle = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$, les charges et les courants sont en phase.

10. Etudier les valeurs ω_n lorsque le couplage est nul ($M = 0$) ou parfait ($M = L$). Commenter.

Si le couplage est nul, $\gamma = 0$ et les deux pulsations sont dégénérées (égales à ω_0). Les deux mailles sont sans interactions et forment deux circuits identiques indépendants. Pour un couplage parfait, $\gamma = \frac{1}{2}$ et le couplage lève la dégénérescence ($\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0$ et $\omega_2 = \sqrt{2}\omega_0$).

A $t = 0$, on charge le premier condensateur $q_1(0) = Q_0$ seulement ($q_2(0) = 0$).

11. Exprimer le vecteur $\left|q(0),U\right\rangle$ dans la base $\{U\}$ des vecteurs propres.

Dans la base naturelle, $\left|q(0),E\right\rangle = \left|\begin{matrix} Q_0 \\ 0 \end{matrix}\right.$. La matrice de passage de U vers E vaut $[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et on en déduit $\left|q(0),U\right\rangle = [P]^{-1}\left|\begin{matrix} Q_0 \\ 0 \end{matrix}\right. = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left|\begin{matrix} Q_0 \\ 0 \end{matrix}\right. = \frac{Q_0}{2}\left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right.$

12. En déduire les charges des condensateurs, puis les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ dans le circuit à tout instant.

Les charges à tout instant s'écrivent dans la base {U} comme une combinaison de modes : $\left|q(t),U\right\rangle = \frac{Q_0}{2}\left|\begin{matrix} \cos(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_2 t) \end{matrix}\right.$ afin de respecter les conditions initiales.

On revient dans la base naturelle : $\left|q(t),E\right\rangle = [P]\frac{Q_0}{2}\left|\begin{matrix} \cos(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_2 t) \end{matrix}\right. = \frac{Q_0}{2}\left|\begin{matrix} \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) \\ -\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) \end{matrix}\right.$. Les courants sont donc donnés par : $\left|i(t),E\right\rangle = \left|\dot{q}(t),E\right\rangle = \left|\begin{matrix} i_1 \\ i_2 \end{matrix}\right. = \frac{Q_0}{2}\left|\begin{matrix} -\omega_1 \sin(\omega_1 t) - \omega_2 \sin(\omega_2 t) \\ \omega_1 \sin(\omega_1 t) - \omega_2 \sin(\omega_2 t) \end{matrix}\right.$.

C. On intercale a present une source de tension ideale dans la cellule 1 (c.f. Figure 4).

Cette source délivre une tension sinusoïdale de pulsation ω dont la représentation complexe s'écrit $\underline{e(t)} = E_0 e^{j\omega t}$. On garde les conventions de sens des courants définies Figure 2 et Figure 3.

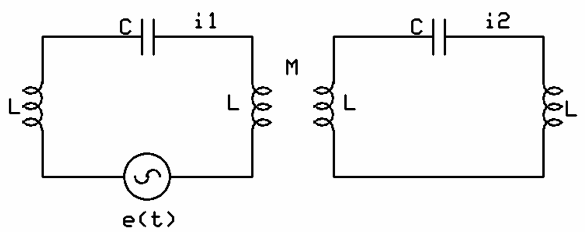


Figure 4 : Forçage par une tension sinusoïdale

13. Montrer que les nouvelles lois des mailles peuvent s'écrire :

$$[A]\left|\underline{\ddot{q}(t)}\right\rangle = -\omega_0^2\left|\underline{q(t)}\right\rangle + e^{j\omega t}\omega_0^2\left|\underline{Q_e}\right\rangle \quad (4)$$

(On précisera l'expression du vecteur $\left|\underline{Q_e}\right\rangle$).

Seule l'équation correspondant à la maille N°1 est modifiée et il vient donc :

$$\begin{cases} 2L\dfrac{d^2q_1}{dt^2} - M\dfrac{d^2q_2}{dt^2} = -\dfrac{q_1}{C} + e(t) \\ -M\dfrac{d^2q_1}{dt^2} + 2L\dfrac{d^2q_2}{dt^2} = -\dfrac{q_2}{C} \end{cases}$$ soit en divisant tout par $2L$: $[A]\left|\ddot{\underline{q}}(t)\right\rangle = -\omega_0^2\left|\underline{q}(t)\right\rangle + \left|\begin{matrix}\dfrac{e(t)}{2L}\\ 0\end{matrix}\right.$

En remplaçant *e(t)* par son expression, on peut montrer que $\left|\begin{matrix}\dfrac{e(t)}{2L}\\ 0\end{matrix}\right. = e^{j\omega t}\left|\begin{matrix}\dfrac{E_0}{2L}\\ 0\end{matrix}\right. = e^{j\omega t}\omega_0^2\left|\begin{matrix}CE_0\\ 0\end{matrix}\right.$, c'est-à-dire $\left|\underline{Q}_e\right\rangle = CE_0\left|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right.$

14. On recherche les solutions de l'équation (4) sous la forme : $\left|\underline{q}(t)\right\rangle = e^{j\omega t}\left|\underline{Q}\right\rangle$. Quelle est la signification physique de telles solutions ? Que représentent les modules et arguments des coordonnées du vecteur $\left|\underline{Q}\right\rangle$?

On cherche des solutions pour lesquelles toutes les charges, et donc tous les courants oscillent à la même pulsation ω qui est aussi celle de l'excitation. On sait que ceci est observable en régime permanent (lorsque les régimes transitoires se sont totalement amortis). Ces solutions correspondent donc au régime permanent d'oscillations forcées du circuit. Les modules des coordonnées de $\left|\underline{Q}\right\rangle$ donnent les amplitudes maximales des oscillations de des charges. Ces amplitudes dépendent de la pulsation ω et sont maximales lorsque ω s'approche des pulsations propres d'oscillations libres étudiées précédemment (phénomène de résonance). Les arguments de ces coordonnées donnent les déphasages entre charges (et courants) des deux mailles.

15. Exprimer la matrice $[\alpha]$ telle que $\left|\underline{Q}\right\rangle = [\alpha]\left|\underline{Q}_e\right\rangle$. Donner ses éléments dans la base $\{U\}$ des modes propres d'oscillations libres, en fonction de ω et des pulsations propres ω_n définies à la question 9.

On part de $\left|\underline{q}(t)\right\rangle = e^{j\omega t}\left|\underline{Q}\right\rangle$, que l'on reporte dans l'équation (4). Il vient $-\omega^2[A]\left|\underline{Q}\right\rangle = -\omega_0^2\left|\underline{Q}\right\rangle + \omega_0^2\left|\underline{Q}_e\right\rangle$, soit en multipliant par $[A]^{-1}$: $\left\{\left[\Omega_0^2\right] - \omega^2[1]\right\}\left|\underline{Q}\right\rangle = \omega_0^2\left|\underline{Q}_e\right\rangle$. En multipliant par la matrice inverse de l'accolade, il vient $\left|\underline{Q}\right\rangle = [\alpha]\left|\underline{Q}_e\right\rangle$, avec $[\alpha] = \omega_0^2\left\{\left[\Omega_0^2\right] - \omega^2[1]\right\}^{-1}$.

16. En déduire l'expression des amplitudes I_1 et I_2 des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction de la pulsation ω.

Si on parvient à déterminer les charges $\left|\underline{q}(t)\right\rangle = e^{j\omega t}\left|\underline{Q}\right\rangle$, on peut en déduire les courants par simple dérivation comme précédemment. On calcule donc la matrice $[\alpha]$. Son expression est simple dans la base {U} des vecteurs propres associés aux oscillations libres, car elle y est alors diagonale : $\left[\Omega_0^2, U\right] = \begin{pmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{pmatrix}$; $[\alpha] = \begin{pmatrix}\dfrac{\omega_0^2}{\omega_1^2 - \omega^2} & 0\\ 0 & \dfrac{\omega_0^2}{\omega_2^2 - \omega^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}$. On peut à présent calculer les charges dans la base {U} :

$$\left|\underline{Q},U\right\rangle=[\alpha,U]\left|\underline{Q_e},U\right\rangle=[\alpha,U][P]^{-1}\left|\underline{Q_e},E\right\rangle$$
$$=\frac{CE_0}{2}\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}=\frac{CE_0}{2}\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{vmatrix}$$

On peut revenir à la base {E} :

$$\left|\underline{Q},E\right\rangle=[P]\left|\underline{Q},U\right\rangle=\frac{CE_0}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{vmatrix}=\frac{CE_0}{2}\begin{vmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ -\alpha_1+\alpha_2\end{vmatrix}$$

On en déduit les courants : $\left|\underline{i}(t)\right\rangle=\left|\underline{\dot{q}}(t)\right\rangle=e^{j\omega t}\begin{vmatrix}\underline{I_1}\\ \underline{I_2}\end{vmatrix}=j\omega e^{j\omega t}\frac{CE_0}{2}\begin{vmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \alpha_2-\alpha_1\end{vmatrix}$

D'où les amplitudes des courants :

$$\begin{vmatrix}I_1\\ I_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\left|\underline{I_1}\right|\\ \left|\underline{I_2}\right|\end{vmatrix}=\frac{CE_0\omega}{2}\begin{vmatrix}\left|\alpha_1+\alpha_2\right|\\ \left|\alpha_2-\alpha_1\right|\end{vmatrix},$$

soit $I_1(\omega)=\dfrac{CE_0\omega}{2}\left|\dfrac{\omega_0^2}{\omega_1^2-\omega^2}+\dfrac{\omega_0^2}{\omega_2^2-\omega^2}\right|$ et $I_2(\omega)=\dfrac{CE_0\omega}{2}\left|\dfrac{\omega_0^2}{\omega_2^2-\omega^2}-\dfrac{\omega_0^2}{\omega_1^2-\omega^2}\right|$

17. Calculer le rapport $\dfrac{I_1}{I_2}$ lorsque $\omega\to 0$ ou $\omega\to\infty$. Donner les déphasages entre les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ dans ces deux cas.

$$\frac{I_1}{I_2}=\left|\frac{\dfrac{\omega_0^2}{\omega_1^2-\omega^2}+\dfrac{\omega_0^2}{\omega_2^2-\omega^2}}{\dfrac{\omega_0^2}{\omega_2^2-\omega^2}-\dfrac{\omega_0^2}{\omega_1^2-\omega^2}}\right|=\left|\frac{\left(\omega_2^2-\omega^2\right)+\left(\omega_1^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_1^2-\omega^2\right)-\left(\omega_2^2-\omega^2\right)}\right|=\left|\frac{\omega_2^2+\omega_1^2-2\omega^2}{\omega_1^2-\omega_2^2}\right|$$

Quand $\omega\to 0$, $\dfrac{I_1}{I_2}\to\left|\dfrac{\omega_2^2+\omega_1^2}{\omega_1^2-\omega_2^2}\right|>1$, les courants ont la même forme que le mode de plus basse fréquence (opposition de phase, le signe est négatif dans la valeur absolue).

Quand $\omega\to\infty$, $\dfrac{I_1}{I_2}\to\left|\dfrac{\omega^2}{\omega_2^2-\omega_1^2}\right|\to\infty$. La forme est celle du mode de plus haute fréquence (courants en phase). On atténue ainsi le courant dans la maille 2.

18. Que se passe-t-il si la pulsation s'approche de l'une des pulsations propres ω_n ?

Lorsque l'on s'approche des fréquences propres, les deux courants ont des amplitudes qui deviennent très grandes (résonance). En pratique, l'amplitude de la résonance est limités par la présence de résistances résiduelles dans le circuit (résistance interne des bobines par exemple).

D. ON CONSIDERE FINALEMENT UNE CHAINE DE CELLULES IDENTIQUES, SEPAREES D'UNE MEME DISTANCE *a* SELON UN MEME AXE (0X). TOUTES CE CELLULES SONT COUPLEES PAR MUTUELLE INDUCTANCE COMME PRECEDEMMENT (C.F. FIGURE 5).

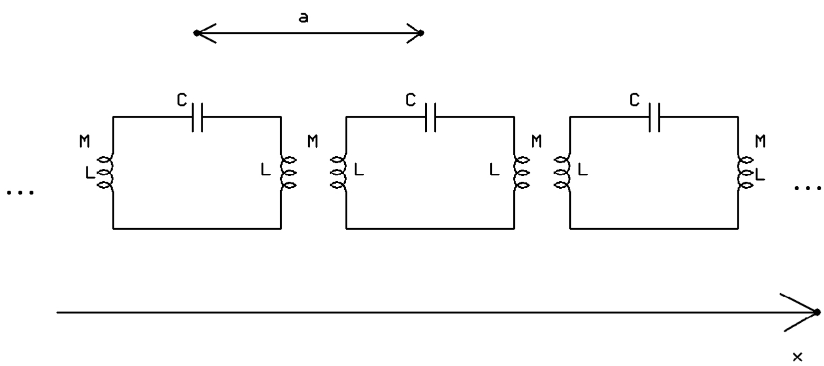


Figure 5 : Chaîne de cellules

19. Ecrire la relation entre les charges q_{n-1}, q_n et q_{n+1} des capacités de trois cellules consécutives, en fonction des paramètres ω_0 et $\gamma = \dfrac{M}{2L}$.

La loi des mailles s'écrit pour la maille n : $L\dfrac{di_n}{dt} - M\dfrac{di_{n-1}}{dt} + \dfrac{q_n}{C} + L\dfrac{di_n}{dt} - M\dfrac{di_{n+1}}{dt} = 0$,

soit :

$2L\dfrac{d^2q_n}{dt^2} - M\dfrac{d^2q_{n-1}}{dt^2} + \dfrac{q_n}{C} - M\dfrac{d^2q_{n+1}}{dt^2} = 0$ et finalement :

$$\frac{d^2q_n}{dt^2} - \gamma\left(\frac{d^2q_{n-1}}{dt^2} + \frac{d^2q_{n+1}}{dt^2}\right) + \omega_0^2 q_n = 0$$

20. On cherche les solutions de l'équation établie à la question précédente sous forme d'ondes de charge se propageant vers les $x > 0$. Donner la représentation complexe $\underline{q}(x)$ d'une telle onde en fonction de $x = n.a$ ($\underline{q}_n = \underline{q}(x)$).

$$\underline{q}(x) = \underline{Q}_{max} e^{j\omega t} e^{-jkx}$$

21. Déterminer la relation de dispersion de la chaîne. Le système est-il dispersif ?

Il suffit de remplacer l'expression précédente dans l'équation de la question 19 :

$$-\omega^2 q_n - \gamma\left(-\omega^2 q_n e^{jka} - \omega^2 q_n e^{-jka}\right) + \omega_0^2 q_n = 0$$

En simplifiant par q_n il vient :

$$\omega^2\left[1 - \gamma\left(e^{jka} - e^{-jka}\right)\right] - \omega_0^2 = 0$$

soit $\omega^2 = \dfrac{\omega_0^2}{1-2\gamma\cos(ka)}$

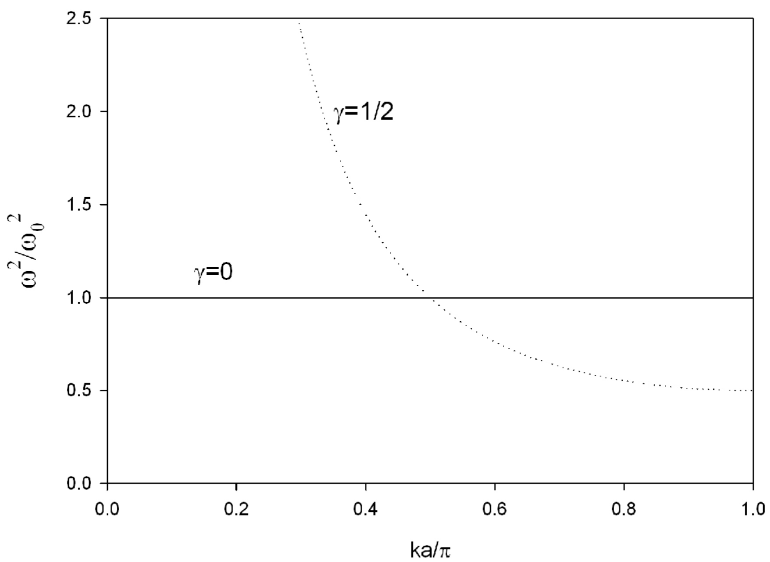
22. Exprimer la pulsation d'une onde de longueur d'onde $\lambda = 4a$ se propageant dans la ligne. Commenter.

Pour $\lambda = 4a$, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\pi}{2a}$ et $\omega^2 = \omega_0^2$. Quel que soit le couplage, la fréquence de cette onde reste indentique. C'est un point fixe des différentes relations de dispersions pour différents couplages.

23. Représenter cette loi de dispersion pour $M = 0$ et $M = L$. Commenter. Le système peut-il présenter un comportement réactif ?

Pour $M = 0$, $\gamma = 0$ et $\omega^2 = \omega_0^2$. On a un ensemble d'oscillateurs 1D indépendants et une seule résonance. On est en zone réactive pour toute fréquence différente de ω_0^2.

Pour $M = L$, le couplage est parfait et $\gamma = \dfrac{1}{2}$. La relation de dispersion s'écrit : $\omega^2 = \dfrac{\omega_0^2}{1-\cos(ka)}$, et elle diverge à basse fréquence.



Dans ce dernier cas, on est en zone réactive à basse fréquence ($\omega < \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}$).

24. Que devient cette vitesse quand λ devient très grande ? Commenter.

Si le couplage est nul, la vitesse est nulle (pas de propagation possible). Si le couplage est parfait, la vitesse de phase tend vers l'infini à basse fréquence et peut donc dépasser la vitesse de la lumière. Elle ne peut donc pas représenter la vitesse de propagation de l'énergie électrique.