UNIVERSITE DE RENNES I
UFR – SPM

MAGISTERE MATERIAUX
MARDI 27 MAI 2003

Ondes et vibrations
Examen Terminal : 2 h
(Aide mémoire autorisé : 2 feuilles 21 x 29,7)

CHAINE DE MOBILES COUPLES

A) Chaîne de mobiles couplés de même masse :

Une chaîne d'oscillateurs est constituée de mobiles identiques de masse M reliés par des ressorts de constante de raideur K et de longueur au repos a, astreints à se déplacer le long de l'axe ox (on posera $\omega_0^2 = K/M$). A l'équilibre, les mobiles sont équidistants, de position

$x_{n0} = n.a$ où n est un entier variant de $-\infty$ à $+\infty$. Lorsque la chaîne est en mouvement, l'abscisse du mobile « n » est $x_n = x_{n0} + \psi_n(t)$

I) 1) Etablir l'équation du mouvement du mobile indicé « n »

2) On cherche des solutions de la forme $\overline{\psi_n}(t) = Ae^{j(\omega t - nka)}$ en notation complexe. A est un réel. Etablir la relation de dispersion liant ω et k.

3) Pourquoi est-il possible de se limiter à l'intervalle $-\pi/a < k < \pi/a$ (première zone de Brillouin) pour décrire les mouvements libres de la chaîne ? Représenter l'allure de la courbe $\omega = f(k)$. Indiquer à quoi correspond le changement k en – k.

4) Préciser l'intervalle de pulsations où on pourra observer la propagation d'ondes progressives sinusoïdales sur la chaîne.

II) On se limitera à une propagation dans le sens des x croissants.

1) Comment pouvez-vous déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe à partir de la courbe de dispersion ?

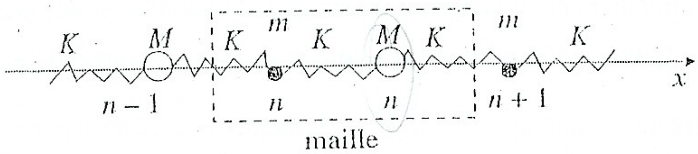
2) Comment se situe la vitesse de phase et la vitesse de groupe l'une par rapport à l'autre ?

3) Commenter les comportements limites de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe lorsque $k \to 0$ et $k \to \pi/a$. Préciser les types de mouvement observés.

III) On cherche maintenant des solutions à l'équation du mouvement sous la forme $\overline{\psi_n}(t) = \bar{A}e^{j(\omega t - nka)}$ où A est une amplitude complexe. Par rapport au fait de prendre A réel, quelle modification introduisez-vous ? La relation de dispersion s'en trouve-t-elle modifiée ?

B) Chaîne de mobiles couplés constituée de deux types de masses :

La chaîne comporte maintenant deux types de mobiles de masse m et M avec m < M placées alternativement. Les masses considérées comme ponctuelles sont couplées par des ressorts identiques de raideur K et de longueur au repos a. Le système peut être décrit par une suite de mailles identiques repérées à l'aide de l'indice n, entier variant de $-\infty$ à $+\infty$.



A l'équilibre les masses sont équidistantes et séparées les unes des autres par la distance a. On étudiera les oscillations longitudinales du système.

1) Ecrire le système d'équations différentielles auquel satisfont les déplacements u_n (masse m) et v_n (masse M) des deux masses de la maille n.
2) En recherchant des solutions sous la forme $\overline{u}_n = u_0 e^{j(\omega t\text{-}kna)}$ et $\overline{v}_n = v_0 e^{j(\omega t\text{-}kna)}$, montrer qu'on obtient deux équations linéaires en u_0 et v_0 et que la résolution de ce système d'équations linéaires conduit pour une valeur de k donnée à deux valeurs possibles de ω que vous appellerez $\omega_a(k)$ et $\omega_0(k)$ avec $\omega_a < \omega_0$. On pourra poser $\omega_1^2 = 2K/m$ et $\omega_2^2 = 2K/M$.
3) Donner les allures des courbes $\omega_a(k)$ et $\omega_0(k)$ dans l'intervalle $0 < k < \pi/a$. Montrer qu'il existe deux domaines de pulsations pour lesquels aucune onde progressive sinusoïdale ne peut se propager.