esir
ECOLE SUPERIEURE
D'INGENIEUR DE RENNES

TSI-ESIR 2-O. Le Meur – année 2015-2016

Contrôle des connaissances sur Fourier (25 minutes)

**Les supports de cours ne sont pas autorisés ! Les questions sont indépendantes.**

*Rappels :*

*Transformation de Fourier discrète d'une image im de taille NxM :*

$$IM[u,v] = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} im[k,l] exp\left(-j2\pi\left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right)$$

*Transformation de Fourier discrète inverse :*

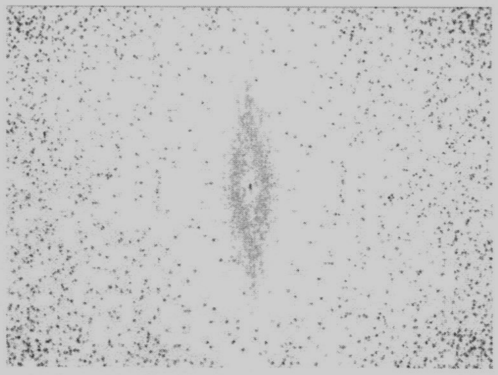
$$im[k,l] = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} IM[u,v] exp\left(j2\pi\left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right)$$

*Laplacien de l'image im :*

$$\nabla^2 im[k,l] = \frac{\partial^2 im[k,l]}{\partial k^2} + \frac{\partial^2 im[k,l]}{\partial l^2}$$

1. Citer trois propriétés importantes de la transformée de Fourier. Merci de les détailler en deux-trois lignes. (Barème indicatif 3 pts),

2. Soit une image naturelle et son spectre d'amplitudes représenté ci-dessous. Placer sur ce spectre la composante continue, les basses fréquences ainsi que les hautes fréquences.



Pouvez-vous donner le type d'image qui serait susceptible d'avoir ce type de signature spectrale ?
(Barème indicatif 2 pts)

3. Démontrer que la transformation de Fourier discrète du Laplacien de l'image im est :

$$\nabla^2 im[k,l] \xrightarrow{Fourier} (2j\pi)^2 \left(\frac{u^2}{N^2} + \frac{v^2}{M^2}\right) IM[u,v]$$

avec IM la transformée de Fourier de l'image im (Merci d'indiquer les détails de la démonstration).

A partir de ce résultats, généraliser à l'ordre n, c'est-à-dire donner la transformée de Fourier de

$$\frac{\partial^n im[k,l]}{\partial k^n} + \frac{\partial^n im[k,l]}{\partial l^n}$$

(Barème indicatif 5 pts)

Correction : Montrer que $\nabla^2 im[k,l] \xrightarrow{Fourier} (2j\pi)^2\left(\frac{u^2}{N^2}+\frac{v^2}{M^2}\right)IM[u,v]$

$$\nabla^2 im[k,l] = \frac{\partial^2 im[k,l]}{\partial k^2} + \frac{\partial^2 im[k,l]}{\partial l^2}$$

On remplace $im[k,l]$ par sa décomposition dans la base de Fourier $im[k,l] = \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1} IM[u,v]exp\left(j2\pi\left(\frac{k}{N}u + \frac{l}{M}v\right)\right)$. On obtient donc :

$$\nabla^2 im[k,l] = \frac{\partial^2}{\partial k^2}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1} IM[u,v]exp\left(j2\pi\left(\frac{k}{N}u+\frac{l}{M}v\right)\right) + \frac{\partial^2}{\partial l^2}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1} IM[u,v]exp\left(j2\pi\left(\frac{k}{N}u+\frac{l}{M}v\right)\right)$$

Comme la dérivée d'une somme correspond à la dérivée des termes de la somme, on a :

$$\nabla^2 im[k,l] = \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1}\frac{\partial^2}{\partial k^2}\left\{IM[u,v]exp\left(j2\pi\left(\frac{k}{N}u+\frac{l}{M}v\right)\right)\right\} + \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1}\frac{\partial^2}{\partial l^2}\left\{IM[u,v]exp\left(j2\pi\left(\frac{k}{N}u+\frac{l}{M}v\right)\right)\right\}$$

Par ailleurs, on a $\frac{\partial^2}{\partial k^2}\left\{IM[u,v]exp\left(j2\pi\left(\frac{k}{N}u+\frac{l}{M}v\right)\right)\right\} = \left(j2\pi\frac{u}{N}\right)^2 IM[u,v]exp\left(j2\pi\left(\frac{k}{N}u+\frac{l}{M}v\right)\right)$ et $\frac{\partial^2}{\partial l^2}\left\{IM[u,v]exp\left(j2\pi\left(\frac{k}{N}u+\frac{l}{M}v\right)\right)\right\} = \left(j2\pi\frac{v}{M}\right)^2 IM[u,v]exp\left(j2\pi\left(\frac{k}{N}u+\frac{l}{M}v\right)\right)$, par conséquent :

$$\nabla^2 im[k,l] = \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1}(j2\pi)^2\left(\frac{u^2}{N^2}+\frac{v^2}{M^2}\right) \quad IM[u,v]exp\left(j2\pi\left(\frac{k}{N}u+\frac{l}{M}v\right)\right)$$

On conclue que la transformée de Fourier de $\nabla^2 im[k,l]$ est :

$$\nabla^2 im[k,l] \xrightarrow{Fourier} (2j\pi)^2\left(\frac{u^2}{N^2}+\frac{v^2}{M^2}\right)IM[u,v]$$

La généralisation à l'ordre n est immédiate.